

Formes optimales pour des fonctions coût non monotones

Alexis de Villeroché

Table des matières

1	Introduction	3
2	Capacité et γ-convergence	5
2.1	Capacité	5
2.2	γ -convergence	6
3	Les valeurs propres du laplacien et la torsion d'un quasi-ouvert	8
4	Preuve du Théorème de Buttazzo - Dal Maso	9
5	Principe de concentration-compacité	10
6	Preuve du Théorème 2	14
7	Etude d'une nouvelle fonctionnelle	18
7.1	Approche numérique	19
7.2	Approche analytique	21

Ce travail a été effectué au LAMA à l'Université Savoie-Mont Blanc sous la direction de Dorin Bucur.

1 Introduction

L'optimisation de forme est une thématique qui s'est développée dans les années 70 pour répondre à des problèmes émergeant de l'ingénierie liée à la mécanique et l'optimisation d'EDP sur des domaines inconnus. Un problème d'optimisation de forme dans sa plus grande généralité s'écrit :

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}\}. \quad (1)$$

Les formes A sont des sous ensembles de \mathbf{R}^d , des ouverts pour des problèmes liés aux EDP, des fermés pour des problèmes de frontière ou de saut, ou encore des mesurables. La classe \mathcal{A} représente la classe des formes admissibles par exemple tous les ouverts de \mathbf{R}^d , les sous ensembles ouverts de $D \subset \mathbf{R}^d$ avec D borné, les convexes... On ajoute en général des contraintes par exemple en fixant la mesure de A ou sa frontière. Enfin F est la fonctionnelle que l'on souhaite minimiser typiquement $F(A)$ dépend de la solution d'une EDP sur A ou du spectre d'un opérateur défini sur A . On définit la notion de solution de (1) de la manière suivante :

Définition 1. Une forme $A^* \in \mathcal{A}$ est dite solution de (1) si

$$F(A^*) = \min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Lors de l'étude de ces problèmes se posent alors plusieurs questions. Premièrement concernant l'existence de solutions, s'il n'y a pas existence dans \mathcal{A} , peut-on relaxer le problème et dans quel sens pour retrouver une solution et sinon pourquoi ? Ce sont ces questions que l'on étudiera ici. Une des difficulté principale lors des questions d'existence est qu'à priori il n'est pas évident qu'on puisse mettre sur \mathcal{A} une topologie compacte qui rende la fonctionnelle F semi continue inférieure ce qui permettrait d'utiliser la méthode directe du Calcul de Variations.

Ensuite, viennent les questions des propriétés qualitatives des solutions peut-on obtenir des informations topologiques, géométrique, de régularité... ?

Pour étudier ce type de problèmes se pose donc la question de notion de topologie que l'on peut utiliser sur la classe des ensembles, deux idées viennent assez naturellement :

1. la distance L^1 des indicatrices, soit pour A_1 et A_2 deux ensembles mesurables,

$$d_{L^1}(A_1, A_2) = \|\mathbf{1}_{A_1} - \mathbf{1}_{A_2}\|_{L^1}$$

2. la distance de Hausdorff entre deux fermés F_1 et F_2

$$d_H(F_1, F_2) = \inf \{\varepsilon > 0 \mid F_1 \subset F_2 \oplus B_\varepsilon \text{ et } F_2 \subset F_1 \oplus B_\varepsilon\}$$

où $F \oplus B = \{x + y \mid x, y \in F \times B\}$. Dans l'optique de travailler avec des ouverts on définit pour A_1 et A_2 deux ouverts

$$d_{HC}(A_1, A_2) = d_H(A_1^C, A_2^C)$$

Cependant bien que ces distances aient leur intérêt pour certain problèmes, on peut voir par l'exemple de Cioranescu et Murat "Un terme étrange venu d'ailleurs" [1] qu'elles ne conviendront pas pour des problèmes liés aux EDPs et il est donc nécessaire de trouver une nouvelle notion de convergence : la γ -convergence qui s'appuie sur la fonction de torsion et qui est naturellement issue de la Γ -convergence des fonctionnelles d'énergie.

En utilisant cette γ -convergence, G. Buttazzo et G. Dal Maso [2] ont démontré un premier résultat d'existence concernant les fonctionnelles monotones pour l'inclusion

Théorème 1. *Soient $\mathcal{A} = \{A \mid A \text{ quasi ouvert}, A \subset D\}$ avec D ouvert borné, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ une fonctionnelle γ -semi continue inférieure décroissante pour l'inclusion, alors le problème*

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}, |A| = c\}$$

admet au moins une solution pour tout $0 < c < |D|$.

Ce théorème donne une première réponse à la question de l'existence mais il a deux limites majeures les plus restrictives étant l'hypothèse de monotonie et la présence de D . Cette dernière contrainte peut être relâchée au cas par cas par le principe concentration-compacité. Il n'existe pas encore de résultats généraux concernant les fonctionnelles non monotones, on peut par contre citer comme exemple un résultat de D. Bucur, J. Lamboley, M. Nahon et R. Prunier [3] faisant intervenir les valeurs propres du laplacien $\{\lambda_j\}$ et la torsion T

Théorème 2. *Soit $F(A) = T(A)^{-1} + \delta\lambda_k(A)$ fonctionnelle définie sur les quasi ouverts de \mathbf{R}^d . Si $|\delta| \ll k^{-(2+\frac{4}{n})}$ alors F admet un minimiseur parmi les quasi ouverts de mesure $\omega_d = |B_1|$.*

On peut aussi citer un résultat lié prouvé par L. Briani, G. Buttazzo et S. Guarino Lo Bianco [4] que l'on n'étudiera pas ici

Théorème 3. *Soit $F_q(A) = \lambda_1(A)T(A)^q$ définie sur les quasi-ouverts. Alors, il existe q_0 tel que si $q > q_0$, le problème*

$$\min \{F_q(A) \mid A \text{ quasi-ouvert}, |A| = 1\},$$

admet une solution.

Contrairement au résultat de Buttazzo - Dal Maso (Théorème 1), dans les théorèmes 2 et 3, la fonctionnelle $A \mapsto F(A)$ n'est pas décroissante pour l'inclusion.

Dans ce rapport, on développera les notions théoriques nécessaires à la compréhension et la démonstration de ces théorèmes, on donnera une preuve des théorèmes 1 et 2, puis on étudiera des pistes de résolutions de nouveaux problèmes.

Notations - Dans la suite, on notera par \mathcal{L}^d la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^d et \mathcal{H}^{d-1} la mesure de Hausdorff. Les intégrales dont le domaine n'est pas spécifié désignent les intégrales sur tout l'espace. On note aussi pour une mesure borélienne μ , l'espace L^2 associé $L^2(\mu) = \left\{ u \in L^2(\mathbf{R}^d) \mid \int u^2 d\mu < +\infty \right\}$.

2 Capacité et γ -convergence

Comme indiqué en introduction il est nécessaire pour traiter ces problèmes d'optimisation et assurer l'existence de solutions de définir une bonne notion de convergence. Ici, par "bonne", on entend suffisamment stable et qui rend continue les fonctionnelles qui nous intéressent. On va donc s'intéresser à la notion de γ -convergence. Pour ce faire, on va introduire le cadre théorique permettant de la définir par la notion de capacité. On pourra ensuite définir les notions de valeur propres du Laplacien et de fonction de torsion dans le cadre relaxé des mesures capacitaires.

Dans toute cette partie, $D \subset \mathbf{R}^d$ est un ouvert.

2.1 Capacité

On définit pour A un sous ensemble de D la capacité de A dans D .

Définition 2. Soit $A \subset D$ un borélien, on définit sa capacité

$$\text{cap}(A, D) = \inf \left\{ \int_D (|\nabla u|^2 + u^2) d\mathcal{L}^d \mid u \in \mathcal{U}_A \right\}$$

où

$$\mathcal{U}_A = \{u \in H_0^1(D) \mid u \geq 1 \text{ sur un voisinage de } A\}.$$

A partir de cette définition, on dit qu'une propriété est vraie quasi-partout si elle est vraie sur le complémentaire d'un ensemble de capacité nulle. On définit aussi la notion de quasi-continuité :

Définition 3. Soit une fonction $u : D \rightarrow \mathbf{R}$, on dit que u est quasi continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble U ouvert de D avec $\text{cap}(U, D) < \varepsilon$ tel que $u|_{D \setminus U}$ est continue.

On définit aussi la notion de quasi-ouvert.

Définition 4. Soit $A \subset D$, on dit que A est quasi ouvert si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert U de D avec $\text{cap}(U, D) < \varepsilon$ tel que $A \cup U$ est ouvert.

A partir de ces définitions, on peut citer un premier théorème de structure des fonctions de $H_0^1(D)$

Théorème 4. Soit $u \in H_0^1(D)$, alors la limite

$$\tilde{u}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} u d\mathcal{L}^d$$

existe quasi-partout dans D et de plus \tilde{u} est quasi-continue et vérifie $\tilde{u} = u$ presque partout.

On peut trouver la preuve dans le livre "Non linear potential theory of degenerate elliptic equations" par J. Heinonen, T. Kilpelainen et O. Martio [5].

Avec ce théorème vient un autre théorème de caractérisation des espaces de Sobolev H_0^1 .

Théorème 5. *Si $A \subset D$ ouvert alors*

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(D) \mid \tilde{u} = 0 \text{ quasi partout sur } D \setminus A\}$$

On va utiliser ce résultat pour étendre la définition de $H_0^1(A)$ aux quasi-ouverts, on définit donc

Définition 5. *Soit $A \in D$ un quasi ouvert, on définit*

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(D) \mid \tilde{u} = 0 \text{ quasi partout sur } D \setminus A\}$$

Cette définition est évidemment compatible avec celle pour les ouverts par le théorème précédent par contre on perd sur les quasi-ouverts la densité de \mathcal{C}_c^∞ qui n'a plus de sens dans ce contexte.

Enfin, on définit la notion de mesure capacitaire qui sera essentielle pour la relaxation des problèmes d'optimisation de forme.

Définition 6. *Soit μ une mesure borélienne sur D , on dit que μ est une mesure capacitaire si elle ne charge pas les ensembles de capacité nulle.*

et donne comme exemple les mesures indicatrices $\infty_{D \setminus A}$ pour A quasi-ouvert de D , qui font le lien entre mesures capacitaires et quasi-ouverts, qui sont définie par

$$\infty_{D \setminus A}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{cap}((B \cup A) \cap A, D) = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2 γ -convergence

A partir des définitions liées à la capacité, on peut citer le théorème fondamental de la stabilité de forme

Théorème 6. *Soit (A_n) et A des quasi-ouverts de D , les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *pour tout toute fonction $f \in H^{-1}(D)$, $w_{A_n, f}$ converge vers $w_{A, f}$ faiblement dans $H_0^1(D)$, où on définit $w_{A_n, f}$ comme l'unique solution de*

$$\begin{cases} -\Delta w_{A_n, f} = f & \text{dans } A_n \\ w_{A_n, f} \in H_0^1(A_n), \end{cases}$$

2. *$w_{A_n, 1}$ converge vers $w_{A, 1}$ faiblement dans $H_0^1(D)$*
3. *$H_0^1(A_n)$ converge au sens de Mosco vers $H_0^1(A)$. Soit,*
 - *$\forall \varphi \in H_0^1(D)$, $\exists \varphi_n \in H_0^1(A_n)$ telle que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $H_0^1(D)$,*
 - *$\forall \varphi_{n_k} \in H_0^1(A_{n_k})$ telle que $\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi$ dans $H_0^1(D)$ alors $\varphi \in H_0^1(A)$.*
4. *Soit $F_n : L^2(D) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$F_n(v) = \begin{cases} \int_D |\nabla v|^2 & \text{si } v \in H_0^1(A_n), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

F_n Γ -converge vers F pour la convergence $L^2(D)$. Soit par définition,

- Pour tout $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(D)$, $F(v) \leq \liminf F_n(v_n)$,
- Pour tout $v \in L^2(D)$, il existe une suite (v_n) de $L^2(D)$ telle que $v_n \rightarrow v$ et $F(v) \geq \limsup F_n(v_n)$.

Remarque - Dans la suite on note $w_A = w_{A,1}$ que l'on appelle la fonction de torsion associée au quasi-ouvert A de D .

On utilise ce théorème comme caractérisation de la γ -convergence.

Définition 7. Soit (A_n) et A des quasi ouverts de D , on dit que A_n γ -converge vers A , noté $A_n \xrightarrow{\gamma} A$, si la suite (A_n) et A vérifient une des assertion du Théorème 6.

Malheureusement, la classe des quasi-ouverts n'est que précompacte pour la γ -convergence. En effet prenons A_n une suite de semi-ouverts dans D et $f \in H^{-1}(D)$, alors le suites $(w_{A_n, f})$ et (w_{A_n}) convergent faiblement à extraction près dans $H_0^1(D)$ respectivement vers w_f et w . De plus pour $\varphi \in C_c^\infty(D)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_D f \varphi w_{A_n} d\mathcal{L}^d &= \int_D \nabla w_{A_n, f} \cdot \nabla (w_{A_n} \varphi) d\mathcal{L}^d \\
&= \int_D \varphi \nabla w_{A_n, f} \cdot \nabla w_{A_n} d\mathcal{L}^d + \int_D w_{A_n} \nabla w_{A_n, f} \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d \\
&= -\langle \Delta w_{A_n}, w_{A_n, f} \varphi \rangle - \int_D w_{A_n, f} \nabla w_{A_n} \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d + \int_D w_{A_n} \nabla w_{A_n, f} \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d \\
&= \int_D \varphi w_{A_n, f} d\mathcal{L}^d - \int_D w_{A_n, f} \nabla w_{A_n} \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d + \int_D w_{A_n} \nabla w_{A_n, f} \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d.
\end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite dans chacun des termes

$$\int_D f \varphi w d\mathcal{L}^d = \int_D \varphi w_f d\mathcal{L}^d - \int_D w_f \nabla w \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d + \int_D w \nabla w_f \cdot \nabla \varphi d\mathcal{L}^d.$$

Et en refaisant les différentes manipulations dans l'autre sens, on en déduit que w_f vérifie au sens faible

$$\begin{cases} -\Delta w_f + w_f \mu = f & \text{dans } (H_0^1(D) \cap L^2(\mu))' \\ w_f \in H_0^1(D) \cap L^2(\mu), \end{cases}$$

où $\mu = \frac{\Delta w + 1}{w}$ est une mesure capacitaire sur D . On étend alors la notion de γ -convergence au sein des mesures capacitaires en définissant pour ν une mesure capacitaire sa fonction de torsion w_ν comme l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta w_\nu + w_\nu \nu = 1 & \text{dans } (H_0^1(D) \cap L^2(\nu))' \\ w_\nu \in H_0^1(D) \cap L^2(\nu), \end{cases}$$

Alors, en utilisant la distance H^1 entre les fonctions de torsion on rend l'espace des mesures capacitaires de D métrique et compact.

Afin de rendre la classe des quasi-ouverts compact, on défini la faible γ -convergence

Définition 8. Soit (A_n) une suite de quasi-ouverts dans D on dit que (A_n) converge faiblement γ vers A , noté $A_n \xrightarrow{\gamma} A$, si $A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$ et $A = \{w_\mu > 0\}$.

De manière évidente, la γ -convergence d'une suite de quasi-ouvert (A_n) vers un autre quasi-ouvert A implique la convergence faible γ , en effet dans ce cas la mesure limite est $\infty_{D \setminus A}$ et $A = \{w_A > 0\}$. L'implication réciproque est fautive, par contre, on peut citer le résultat suivant qui permet de retrouver une suite convergeant fortement à partir d'une suite convergeant faiblement.

Lemme 1. *Soient $(A_n), A$ et B des quasi-ouverts de D tels que $A_n \xrightarrow{\gamma} A$ et $A \subset B$. Alors, on peut extraire une sous suite (A_{n_k}) de (A_n) et trouver une suite (B_k) de quasi-ouverts telle que pour tout k , $A_{n_k} \subset B_k$ et $B_k \xrightarrow{\gamma} B$.*

On cite aussi un lemme concernant la faible γ -convergence qui sera utile par la suite.

Lemme 2. *Soit (A_n) une suite de quasi-ouverts de D et A un quasi-ouvert de D tels que $A_n \xrightarrow{\gamma} A$ alors $A_n \cap A \xrightarrow{\gamma} A$*

3 Les valeurs propres du laplacien et la torsion d'un quasi-ouvert

Dans cette partie on résume des résultats préliminaires que l'on étudiera pas plus en détail qui traitent des valeurs propres du laplacien et de la torsion. Commençons par des définitions

Définition 9. *Soit A un quasi-ouvert, on définit la k -ième valeur propre du laplacien de Dirichlet sur A comme*

$$\begin{aligned} \lambda_k(A) &= \inf \left\{ \sup_{v \in V} \frac{\int_A |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^d}{\int_A v^2 d\mathcal{L}^d} \mid V \subset H_0^1(A) \text{ de dimension } k \right\} \\ &= \int_A |\nabla u_k|^2 d\mathcal{L}^d \end{aligned}$$

où $u_k(A)$ est un vecteur propre associé, solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k(A) u_k \text{ dans } A \\ u_k \in H_0^1(A), \int_A u_k^2 d\mathcal{L}^d = 1. \end{cases}$$

Définition 10. *Soit A un quasi-ouvert, on définit la torsion de A comme*

$$\begin{aligned} T(A) &= \sup_{H_0^1(A) \cap L^2(\mu)} \int_A (2v - |\nabla v|^2) d\mathcal{L}^d \\ &= \sup_{H_0^1(A)} \frac{(\int_A v d\mathcal{L}^d)^2}{\int_A |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^d} \\ &= \int w_A d\mathcal{L}^d, \end{aligned}$$

où w_A la fonction de torsion est solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 \text{ dans } A \\ w \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Deux résultats essentiels à la suite autour de ces quantités sont résumés dans les deux inégalités suivantes, pour tout quasi-ouvert A de \mathbf{R}^d ,

$$\lambda_1(A) \geq \frac{|B_1|^{2/d}}{|A|^{2/d}} \lambda_1(B_1) \quad (2)$$

$$T(A) \leq \frac{|A|^{\frac{d+2}{d}}}{|B_1|^{\frac{d+2}{d}}} T(B_1) \quad (3)$$

On appelle ces inégalités les inégalités de Faber-Krahn et Saint-Venant et elle indique qu'à volume fixé, la boule est le minimiser de la première valeur propre tandis qu'elle maximise la torsion. On donne aussi l'inégalité de Kohler-Jobin qui est un premier résultat pour des fonctionnelle non monotones au sens de l'inclusion.

$$\lambda_1(A) T(A)^{2/(2+d)} \geq \lambda_1(B_1) T(B_1)^{2/(2+d)} \quad (4)$$

4 Preuve du Théorème de Buttazzo - Dal Maso

On propose de démontrer le Théorème 1 que l'on rappelle ici.

Théorème. Soient $\mathcal{A} = \{A \mid A \text{ quasi ouvert}, A \subset D\}$ avec D ouvert borné, et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonctionnelle γ -semi continue inférieure décroissante pour l'inclusion, alors le problème

$$\min \{F(A) \mid A \in \mathcal{A}, |A| = c\}$$

admet au moins une solution pour tout $0 < c \leq |D|$.

La preuve suit la méthode directe du Calcul de Variation, on va prendre une suite minimisante, puis montrer qu'elle converge à extraction près vers une forme admissible qui sera un minimum. Les difficultés sont d'ordres techniques, notamment pour montrer que la mesure capacitaire γ -limite de la suite minimisante correspond à un quasi-ouvert, i.e elle prend seulement les valeurs 0 et $+\infty$. Dans cette démonstration on contourne la difficulté par la notion de faible γ -convergence

Preuve -Soit (A_n) une suite minimisante, on définit (w_n) les fonctions de torsion associées comme la solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta w_n = 1 \text{ dans } A_n \\ w_n \in H_0^1(A_n) \end{cases}$$

Alors $\|w_n\|_{H^1(D)} \leq \|w_D\|_{H^1(D)}$ où w_D est la fonction de torsion associée à D . On en déduit donc qu'il existe $w \in H_0^1(D)$ telle qu'à extraction près, $w_n \rightharpoonup w$ dans $H^1(D)$ et donc

$$A_n \xrightarrow{\gamma} A = \{w > 0\}$$

par définition. En particulier $|A| \leq c$

Soit $B \supset A$ tel que $|B| = c$ par le Lemme 1 on peut extraire une sous-suite (A_{n_k}) et trouver une suite B_k telles que $A_{n_k} \subset B_k$ et

$$B_k \xrightarrow{\gamma} B$$

Alors par semi continuité inférieure et décroissance de F ,

$$F(B) \leq \liminf F(B_k) \leq \liminf F(A_{n_k}).$$

On en déduit que B convient. □

Remarques - On peut comprendre où vont se trouver les difficultés si on retire l'hypothèse de décroissance en effet on ne pourra plus utiliser le lemme pour palier au fait que la convergence est seulement faible il faudra donc a priori trouver une suite minimisante convergeant fortement et de plus il faudra que toute la masse soit conservée à la limite.

On voit aussi ici que l'on doit travailler dans les sous ensembles de D pour s'assurer que la suite aie une valeur d'adhérence, on pourrait cependant se passer de cette hypothèse dans certain cas en utilisant le principe de concentration capacité pour recentrer la suite dans un domaine borné.

5 Principe de concentration-compacité

Le principe de concentration-compacité permet de décrire les différents types de comportements que peuvent avoir les suites de fonctions faiblement convergentes, ce qui permet alors de prévoir s'il est possible de les corriger pour les faire converger fortement. On donne ici une version du résultat pour les fonctions faiblement convergentes dans $H^1(\mathbf{R}^d)$, la preuve s'inspire de celle donnée par P.L. Lions dans le cadre des fonctions L^1 (voir [6] Lemme I.1).

Théorème 7. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonction bornée dans $H^1(\mathbf{R}^d)$ telle que

$$\int u_n^2 d\mathcal{L}^d \rightarrow \lambda > 0,$$

Alors, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ vérifiant l'un des trois points suivants

— (compacité) il existe une suite (y_k) d'éléments de \mathbf{R}^d telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \geq 1, \exists R(\varepsilon, k_0) > 0, \int_{y_k + B_R} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \geq \lambda - \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

— (évanescence)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbf{R}^d} \int_{y + B_R} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d = 0,$$

— (dichotomie) il existe $\alpha \in]0, \lambda[$ et deux suites $(v_{k,1})_k$ et $(v_{k,2})_k$ bornées dans $H^1(\mathbf{R}^d)$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k} - (v_{k,1} + v_{k,2})\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \int v_{k,1}^2 d\mathcal{L}^d &= \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int v_{k,2}^2 d\mathcal{L}^d = \lambda - \alpha, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{dist}(\text{supp } v_{k,1}, \text{supp } v_{k,2}) &= +\infty, \\ \liminf_k \int (|\nabla u_{n_k}|^2 - |\nabla v_{k,1}|^2 - |\nabla v_{k,2}|^2) d\mathcal{L}^d &\geq 0. \end{aligned}$$

Preuve - Pour démontrer ce résultat, on utilise les fonctions de concentration de mesures, on définit donc

$$\forall t > 0, \quad Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d} \int_{y+B_t} u_n^2 d\mathcal{L}^d$$

On remarque que les Q_n sont croissantes et équibornées avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = \int u_n^2 d\mathcal{L}^d$. Par ailleurs la suite étant bornée dans $BV(0, T)$ pour tout $T > 0$, en déduit qu'il existe une fonction croissante positive bornée Q et une sous suite (Q_{n_k}) telle que pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n_k}(t) = Q(t)$. De plus Q admet une limite $\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) \in [0, \lambda]$. Premièrement, si $\alpha = 0$ on est dans la situation d'évanescence. Ensuite, si $\alpha = \lambda$, on est dans la situation de compacité. En effet, si $\alpha = \lambda$, prenons $\mu > \lambda/2$, alors, pour $k_0(\mu)$ suffisamment grand,

$$\forall k \geq k_0(\mu), \quad \left| \int u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d - \lambda \right| \leq \frac{\lambda - \mu}{2}$$

et pour $R(\mu) > 0$ assez grand, $Q(R(\mu)) > \mu$. Alors par définition de $Q(R)$, il existe un $k_1(R)$ tel que

$$\forall k \geq k_1, \quad Q_{n_k} > \mu,$$

les Q_{n_k} étant croissante, si $k_1 > k_0$, pour tout k , $k_0 \leq k \leq k_1$ il existe un R_k tel que $Q_{n_k}(R_k) > \mu$, en prenant le maximum, on en déduit qu'il existe $R(\mu, k_0)$ tel que

$$\forall k \geq k_0(\mu), \quad Q_{n_k}(R(\mu, k_0(\mu))) > \mu.$$

Ainsi par définition de Q_{n_k} , il existe une suite $(y_k(\mu))$ d'éléments de \mathbf{R}^d telle que

$$\forall k \geq k_0(\mu), \quad \int_{y_k(\mu)+B_{R(\mu, k_0)}} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d > \mu.$$

Posons maintenant, pour tout k , $y_k = y_k \left(\frac{3\lambda}{4} \right)$, alors,

$$\forall k \geq \max \left(k_0(\mu), k_0 \left(\frac{3\lambda}{4} \right) \right), \quad |y_k(\mu) - y_k| < R \left(\frac{3\lambda}{4} \right) + R(\mu),$$

sinon on aurait

$$\int_{y_k(\mu)+B_{R\left(\frac{3\lambda}{4}\right)}} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d + \int_{y_k(\mu)+B_{R(\mu)}} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \leq \int u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d,$$

ce qui impliquerait $\frac{5\lambda}{4} < \frac{5\lambda}{4}$ ce qui est absurde. On définit alors $\tilde{k}_0 = \max \left(k_0(\mu), k_0 \left(\frac{3\lambda}{4} \right) \right)$

et $\tilde{R}(\mu) = R \left(\frac{3\lambda}{4} \right) + 2R(\mu)$ et on obtient la compacité.

Enfin, si $\alpha \in]0, \lambda[$, on se trouve dans le cas de la dichotomie.

Prenons $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, alors, il existe un $R > 0$ tel que $Q(R) > \alpha - 1/m$, on suppose

$R > dm$, et donc pour $k \geq k_0$ assez grand, $\alpha - 1/m < Q_{n_k}(R) < \alpha + 1/m$ et donc il existe une suite $(y_k)_k$ telle que

$$\forall k \geq k_0, \quad \int_{y_k + B_{Rm}} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \in]\alpha - 1/m, \alpha + 1/m[.$$

Par ailleurs il existe une suite de réels positifs (R_k) telle que $R_k \rightarrow +\infty$ et pour tout $Q_{n_k}(R_k) < \alpha + 1/m$, et on suppose que pour $k \geq k_0$, $R_k - R > 3m$, quitte à changer k_0 .

On suppose aussi,

$$\forall k \geq k_0, \quad \left| \int u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d - \alpha \right| \leq 1/m.$$

On définit deux suites de fonctions cut-off $(\eta_{k,m,1})_k$ et $(\eta_{k,m,2})_k$ telles que pour tout k ,

$$\eta_{k,m,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - y_k| < R \\ \frac{R + m - |x - y_k|}{m} & \text{si } R \leq |x - y_k| \leq R + m \\ 0 & \text{si } |x - y_k| > R + m \end{cases},$$

$$\eta_{k,m,2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - y_k| < R_k - m \\ \frac{|x - y_k| - (R_k - m)}{m} & \text{si } R_k - m \leq |x - y_k| \leq R_k \\ 1 & \text{si } |x - y_k| > R_k \end{cases}.$$

On définit maintenant pour tout k , $w_{k,m,1} = \eta_{k,m,1} u_{n,k}$ et $w_{k,m,2} = \eta_{k,m,2} u_{n,k}$ qui sont équi-bornées dans $H^1(\mathbf{R}^d)$ pour tout (k, m) .

On va montrer chacune des estimations proposées dans l'énoncé du théorème avec ces deux suites puis on extraira les suites $(v_{k,1})_k$ et $(v_{k,2})_k$ par un procédé diagonal.

— (*estimation de la norme L^2*) Pour $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \int (u_{n_k} - w_{k,m,1} - w_{k,m,2})^2 d\mathcal{L}^d &= \int_{R \leq |x - y_k| \leq R_k} (1 - (\eta_{k,m,1} + \eta_{k,m,2}))^2 u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \\ &\leq \int_{R \leq |x - y_k| \leq R_k} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \\ &\leq Q_{n_k}(R_k) - \int_{y_k + B_R} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \\ &\leq \alpha + 1/m - (\alpha - 1/m) = 2/m. \end{aligned}$$

— (*estimation de la masse*) Pour $k \geq k_0$, comme $0 \leq \eta_{k,m,1} \leq 1$,

$$\alpha - 1/m \leq \int_{y_k + B_R} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \leq \int w_{k,m,1}^2 d\mathcal{L}^d \leq \int_{y_k + B_{R_k}} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \leq \alpha + 1/m,$$

qui se réécrit

$$\left| \int w_{k,m,1}^2 d\mathcal{L}^d - \alpha \right| \leq 1/m.$$

De même pour $k \geq k_0$, on a

$$\int w_{k,m,2}^2 d\mathcal{L}^d = \int u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d - \int (1 - \eta_{k,m,2}^2) u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d$$

et on en déduit en utilisant les différentes estimations

$$\left| \int w_{k,m,2}^2 d\mathcal{L}^d - (\lambda - \alpha) \right| \leq 2/m.$$

— (estimation de la distance des supports) Pour $k \geq k_0$, on a

$$\text{dist}(\text{supp } w_{k,m,1}, \text{supp } w_{k,m,2}) = R_k - m - (R + m) \geq m$$

— (estimation H^1) Pour $k \geq k_0$, on peut calculer

$$\begin{aligned} & \int (|\nabla u_{n_k}|^2 - |\nabla w_{k,m,1}|^2 - |\nabla w_{k,m,2}|^2) d\mathcal{L}^d \\ &= \int (1 - (\eta_{k,m,1}^2 + \eta_{k,m,2}^2)) |\nabla u_{n_k}|^2 d\mathcal{L}^d - \int (|\nabla \eta_{k,m,1}|^2 + |\nabla \eta_{k,m,2}|^2) u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \\ & \quad - 2 \int \eta_{k,m,1} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,1} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d - 2 \int \eta_{k,m,2} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,2} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d. \end{aligned}$$

On traite chaque termes séparément. Le premier est positif donc il ne pose aucun problèmes et on peut estimer facilement le deuxième

$$\int (|\nabla \eta_{k,m,1}|^2 + |\nabla \eta_{k,m,2}|^2) u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \leq \frac{1}{m^2} \int_{R \leq |x-y_k| \leq R_k} u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \leq \frac{2}{m^3}.$$

Les troisième et quatrième termes se traitent de la même manière, regardons le troisième

$$\begin{aligned} 2 \int \eta_{k,m,1} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,1} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d &= \frac{1}{2} \int_{R \leq |x-y_k| \leq R+m} \nabla(\eta_{k,m,1}^2) \cdot \nabla(u_{n_k}^2) d\mathcal{L}^d \\ &= -\frac{1}{2} \int_{R \leq |x-y_k| \leq R+m} \Delta(\eta_{k,m,1}^2) u_{n_k}^2 d\mathcal{L}^d \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{|x-y_k|=R+m} u_{n_k}^2 \nabla(\eta_{k,m,1}^2) \cdot \frac{(x-y_k)}{|x-y_k|} d\mathcal{H}^{d-1} \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{|x-y_k|=R} u_{n_k}^2 \nabla(\eta_{k,m,1}^2) \cdot \frac{(x-y_k)}{|x-y_k|} d\mathcal{H}^{d-1}, \end{aligned}$$

or pour $R \leq |x-y_k| \leq R+m$,

$$\nabla(\eta_{k,m,1}^2)(x) = -\frac{2}{m^2} ((R+m) - |x-y_k|) \frac{x-y_k}{|x-y_k|},$$

et

$$\Delta(\eta_{k,m,1}^2)(x) = \frac{2}{m^2} \left(1 + (d-1) \frac{|x-y_k| - (R+m)}{|x-y_k|} \right) \geq \frac{2}{m} \left(1 - \frac{d-1}{d+1} \right) \geq 0.$$

Ainsi en utilisant la continuité de l'application trace de $H^1(B_R)$ dans $L^2(\partial B_R)$,

$$2 \int \eta_{k,m,1} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,1} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d \leq \frac{1}{m} \int_{|x-y_k|=R} u_{n_k}^2 d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{C(B_R)^2}{m} \|u_{n_k}\|_{H^1(B_R)}^2,$$

de plus comme $R \geq 1$, $C(B_R) \leq C(B_1)$ et utilisant le fait que la suite (u_n) est bornée dans $H^1(\mathbf{R}^d)$, on en déduit qu'il existe une constante $M > 0$ indépendante de m tel que

$$2 \int \eta_{k,m,1} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,1} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d \leq \frac{M}{m}.$$

De la même manière on obtient

$$2 \int \eta_{k,m,2} u_{n_k} \nabla \eta_{k,m,2} \cdot \nabla u_{n_k} d\mathcal{L}^d \leq \frac{M}{m}.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de m tel que

$$\forall k \geq k_0, \quad \int (|\nabla u_{n_k}|^2 - |\nabla w_{k,m,1}|^2 - |\nabla w_{k,m,2}|^2) d\mathcal{L}^d \geq -\frac{C}{m}.$$

On remarque qu'il est possible de choisir la suite $(k_0(m))_m$ strictement croissante, quitte à la remplacer par $(\tilde{k}_0(m))$, où $\tilde{k}_0(m) = \max(k_0(m), k_0(m-1) + 1)$ (on définit $k_0(0) = 0$). On pose alors pour tout k , $m(k) = \max\{m | k_0(m) \leq k\}$ alors, $(m(k))_k$ est croissante et tend vers $+\infty$ et évidemment, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq k_0(m(k))$. On en déduit donc que les suites $(v_{k,1})_k$ et $(v_{k,2})_k$ définies pour tout k par $v_{k,1} = w_{k,m(k),1}$ et $v_{k,2} = w_{k,m(k),2}$ conviennent. \square

De ce résultat découle un principe similaire décrivant le comportement des suites de quasi-ouverts de \mathbf{R}^d de mesure bornée qui est la forme du théorème que l'on utilisera par la suite.

Théorème 8. *Soit (A_n) une suite de quasi-ouverts de \mathbf{R}^d de mesures uniformément bornées, il existe une sous suite notée avec les mêmes indices vérifiant l'un des deux points suivants*

— (compacité) *il existe une suite (y_n) de vecteurs de \mathbf{R}^d et une mesure capacitaire μ telles que $y_n + A_n \xrightarrow{\gamma} \mu$,*

— (dichotomie) *il existe une suite de sous ensembles (\tilde{A}_n) telle que*

$$\|w_{A_n} - w_{\tilde{A}_n}\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \tilde{A}_n = \tilde{A}_{n,1} \cup \tilde{A}_{n,2} \subset A_n$$

avec $\text{dist}(\tilde{A}_{n,1}, \tilde{A}_{n,2}) \rightarrow +\infty$ et $\liminf |\tilde{A}_{n,i}| > 0$.

Remarque - Pour démontrer ce théorème, on utilise le résultat précédent appliqué aux fonctions de torsion des quasi-ouverts (voir [7] Théorème 2.2).

6 Preuve du Théorème 2

On se propose maintenant de présenter une preuve du Théorème 2. La preuve nécessite plusieurs lemmes techniques de comparaison et son corollaire que nous ne démontreront pas concernant des estimation spécifique (voir [3] Lemme 4.3 et corollaire 4.4).

Lemme 3. *Si A est quasi ouvert alors pour tout k ,*

$$\lambda_k(A) \leq C_d k^{\frac{2}{d}} T^{-1}(A).$$

Lemme 4. *Si $A \subset B$ sont deux quasi ouverts de mesure finie alors*

$$\frac{1}{\lambda_k(B)} - \frac{1}{\lambda_k(A)} \leq e^{\frac{1}{4\pi}} k \lambda_k(B)^{\frac{2}{d}} (T(B) - T(A)).$$

Lemme 5. *Soit A un quasi ouvert de mesure ω_d tel que*

$$T^{-1}(A) + \delta \lambda_k(A) \leq T^{-1}(B_1) + \delta \lambda_k(B_1),$$

alors en supposant $\mathcal{F}(A) = |A\Delta B_1|$, si $\delta \ll k^{-\frac{2}{d}}$,

$$\begin{aligned} |A\Delta B_1| &\lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}, & T(A) &\lesssim 1, & \lambda_k(A) &\lesssim k^{\frac{2}{d}}, \\ T(A)^{-1} - T(B_1)^{-1} &\lesssim k^{\frac{2}{d}} |\delta|, \\ \forall i \geq 1, & |\lambda_i(A) - \lambda_i(B_1)| &\lesssim i^{2+\frac{4}{d}} k^{\frac{1}{n}} |\delta|^{\frac{1}{2}}, \\ \|w_A - w_{B_1}\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} &\lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Si A quasi ouvert vérifie les même hypothèses, alors*

$$\begin{aligned} T^{-1}(A) - T^{-1}(B_1) &\lesssim k^{4+\frac{8}{d}} |\delta|^2, \\ \mathcal{F} &\lesssim k^{2+\frac{4}{d}} |\delta|, \\ \forall i \geq 1, & |\lambda_i(A) - \lambda_i(B_1)| \lesssim i^{2+\frac{4}{d}} k^{\frac{1}{n}} |\delta|. \end{aligned}$$

Ici,

$$\mathcal{F}(A) = \sup \{A\Delta(y + B) \mid y \in \mathbf{R}^d\}$$

désigne l'asymétrie de Fraenkel de A avec pour deux ensembles Ω_1 et Ω_2 , $\Omega_1\Delta\Omega_2 = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)$ qui correspond à la différence symétrique de ces ensembles.

On va donc démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $F(A) = T(A)^{-1} + \delta \lambda_k(A)$ fonctionnelle définie sur les quasi ouverts de \mathbf{R}^d . Si $|\delta| \ll k^{-(2+\frac{4}{d})}$ alors F admet un minimiseur parmi les quasi-ouverts de mesure $\omega_d = |B_1|$.*

Dans ce cas, on arrive à utiliser le même schéma de preuve on va dans un premier temps relaxer la condition de masse puis prendre une suite minimisante qui convergera par concentration capacité faiblement γ et ensuite il faudra montrer que nécessairement la limite est un ensemble.

Dans un premier temps, afin de relaxer le problème, on étend les définitions de de valeurs propres et de la torsion à toute mesure capacitaire μ .

Définition 11. *Soit μ une mesure capacitaire, on définit la k -ième valeur propre de μ comme*

$$\begin{aligned} \lambda_k(\mu) &= \inf \left\{ \sup_{v \in V} \frac{\int |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^d + \int v^2 d\mu}{\int v^2 d\mathcal{L}^d} \mid V \subset H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu) \text{ de dimension } k \right\} \\ &= \int |\nabla u_k(\mu)|^2 d\mathcal{L}^d + \int u_k(\mu)^2 d\mu, \end{aligned}$$

où $u_k(\mu)$ est solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta v + v \mu = \lambda_k(\mu)v \text{ dans } [H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu)]' \\ v \in H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu), \int_D v^2 d\mathcal{L}^d = 1. \end{cases}$$

Définition 12. Soit μ une mesure capacitaire, on définit la torsion de μ comme

$$\begin{aligned} T(\mu) &= \sup_{H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu)} \int (2v - |\nabla v|^2) d\mathcal{L}^d - \int v^2 d\mu \\ &= \sup_{H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu)} \frac{(\int v d\mathcal{L}^d)^2}{\int |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^d + \int v^2 d\mu} \\ &= \int w_\mu d\mathcal{L}^d, \end{aligned}$$

où w_μ est solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta w + w \mu = 1 \text{ dans } [H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu)]' \\ w \in H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu). \end{cases}$$

On remarque que ces définitions sont une extension directe des définitions sur les domaines en effet si $\mu = \infty_{\mathbf{R}^d \setminus A}$ on retrouve le cas classique.

On note $A_\mu = \{w_\mu > 0\}$, et on va démontrer l'existence du minimizer pour le problème relaxé sur la classe $\tilde{\mathcal{A}}$ des mesures capacitaires (qui contient \mathcal{A}) en imposant $|A_\mu| = \omega_d$, on montrera ensuite que ce minimizer appartient à \mathcal{A} on aura alors démontré le théorème.

Preuve du théorème- Dans un premier temps, montrons qu'on peut affaiblir l'hypothèse de masse en considérant $|A| \leq \omega_d$ au lieu de $|A| = \omega_d$. En effet, si $A \in \mathcal{A}$ et $|A| = (1-t)\omega_d$ pour $0 < t < 1$, alors $(1-t)^{-\frac{1}{d}}A$ est toujours admissible et

$$\begin{aligned} F((1-t)^{-\frac{1}{d}}A) &= (1-t)^{\frac{n+2}{n}} T^{-1}(A) + (1-t)^{\frac{2}{n}} \delta \lambda_k(A) \\ &\leq (1-t)^{\frac{2}{n}} (T^{-1}(A) + \delta \lambda_k(A)). \end{aligned}$$

Or par le Lemme 3, $\lambda_k(A) \leq C_d k^{\frac{2}{d}} T^{-1}(A)$, donc si $|\delta| \leq C_d k^{-\frac{2}{d}}$, on en déduit

$$(T^{-1}(A) + \delta \lambda_k(A)) \geq 0.$$

Ce qui implique

$$F((1-t)^{-\frac{1}{d}}A) \leq F(A).$$

On considère maintenant une suite minimisante (A_p) et quitte à remplacer certains termes par la boule, on suppose que pour tout p , $F(A_p) \leq F(B_1)$ on se trouve donc dans les hypothèses du Lemme 5. Donc, quitte à traduire les A_p , on en déduit $|A_p \Delta B_1| \lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}$. On souhaite montrer qu'à extraction près, la suite des A_p γ -converge on applique donc le théorème 8 et

pour avoir convergence, il est nécessaire d'exclure le cas de la dichotomie, On va procéder par contradiction, on suppose qu'il existe une suite de quasi ouverts (\tilde{A}_p) qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall p, \quad \tilde{A}_p &= A_p^1 \cup A_p^2 \subset A_p, \\ \text{dist}(A_p^1, A_p^2) &\rightarrow +\infty, \\ \liminf |A_p^i| &> 0, \\ \|w_{\tilde{A}_p} - w_{A_p}\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Alors, en particulier, $|T(A_p) - T(\tilde{A}_p)| \rightarrow 0$ et $|\lambda_k(A_p) - \lambda_k(\tilde{A}_p)| \rightarrow 0$ donc la suite (\tilde{A}_p) est aussi minimisante. De plus, toujours par le lemme 5, $T^{-1}(A_p) - T^{-1}(B_1) \lesssim k^{\frac{2}{d}} |\delta|$ ce qui implique quitte à modifier un nombre fini de termes que, $T^{-1}(\tilde{A}_p) - T^{-1}(B_1) \lesssim k^{\frac{2}{d}} |\delta|$ on en déduit en utilisant l'inégalité de Saint-Venant qu'on a l'estimation $|A_p \setminus \tilde{A}_p| \lesssim k^{\frac{2}{d}} |\delta|$. Alors, si $|\delta| \leq k^{-\frac{2}{d}}$, on en déduit $|\tilde{A}_p \Delta B_1| \leq |A_p \Delta B_1| + |A_p \setminus \tilde{A}_p| \lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}$. Enfin, comme $\text{dist}(A_p^1, A_p^2) \rightarrow +\infty$, on peut supposer, quitte à échanger A_p^1 et A_p^2 , que $|\tilde{A}_p \Delta B_1| = |A_p^1 \Delta B_1| + |A_p^2|$ ce qui donne $|A_p^1 \Delta B_1| \lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}$ et $|A_p^2| \lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}$.

On va montrer maintenant que $\lambda_k(\tilde{A}_p) = \lambda_k(A_p^1)$ si $|\delta| \ll k^{-2-\frac{4}{d}}$. Premièrement, par l'inégalité de Faber Krahn, on obtient

$$\lambda_1(A_p^2) \gtrsim |A_p^2|^2 \gtrsim k^{-\frac{2}{d}} |\delta|^{-1}.$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme 3 et les différentes estimations que l'on a montré, on obtient

$$\lambda_k(A_p^1) \lesssim k^{\frac{2}{d}} T^{-1}(A_p^1) \lesssim k^{\frac{2}{d}}.$$

D'où, $\lambda_k(A_p^1) \leq \lambda_1(A_p^2)$ si $|\delta| \ll k^{-\frac{4}{d}}$ et donc on a bien $\lambda_k(\tilde{A}_p) = \lambda_k(A_p^1)$.

On définit pour la suite de réels (t_p) dans $[0, 1]$ telle que pour tout p , $|A_p^2| = t_p \omega_d$, en particulier, (t_p) vérifie $t_p \lesssim k^{\frac{1}{d}} |\delta|^{\frac{1}{2}}$ et $\liminf t_p > 0$. On va montrer que $\left((1 - t_p)^{-\frac{1}{d}} A_p^1\right)$ définit une suite minimisante strictement meilleur que (A_p) on aura alors une contradiction. Dans un premier temps, en utilisant les estimations précédentes, on trouve $T(A_p^1) \lesssim 1$ et $T(A_p^2) \lesssim t_p^{\frac{d+2}{d}} \lesssim k^{\frac{d+2}{d^2}} |\delta|^{\frac{d+2}{2d}}$ alors en particulier, pour une constante $C_d > 0$ assez grande, $T^{-1}(A_p^1) \leq T^{-1}(\tilde{A}_p) + C_d t_p^{\frac{d+2}{d}}$. On peut donc évaluer

$$\begin{aligned} F\left((1 - t_p)^{-\frac{1}{d}} A_p^1\right) &= (1 - t_p)^{\frac{d+2}{d}} T^{-1}(A_p^1) + \delta (1 - t_p)^{\frac{2}{d}} \lambda_k(A_p^1) \\ &\leq T^{-1}(A_p^1) + \delta \lambda_k(A_p^1) - t_p \left(T^{-1}(A_p^1) - |\delta| \lambda_k(A_p^1)\right) \\ &\leq F(\tilde{A}_p) - t_p \left(T^{-1}(A_p^1) - C_d t_p^{\frac{2}{d}} - |\delta| \lambda_k(A_p^1)\right) \\ &\leq F(\tilde{A}_p) - t_p \left(T^{-1}(B_1) - \tilde{C}_d \left(k^{\frac{2}{d}} |\delta|^{\frac{1}{d}} + k^{\frac{4}{d}} |\delta|\right)\right). \end{aligned}$$

Alors, $|\delta| \ll k^{-\frac{4}{d}}$, le facteur $T^{-1}(B_1) - \tilde{C}_d \left(k^{\frac{2}{d}} |\delta|^{\frac{1}{d}} + k^{\frac{4}{d}} |\delta|\right)$ est strictement positif et donc comme $\liminf t_p > 0$, on trouve bien un suite minimisante strictement meilleure.

Alors, on en déduit qu'il existe une mesure capacitaire μ telle qu'après extraction et translation des A_p , la suite (A_p) γ -converge vers μ . On définit w_μ la fonction de torsion associée et $A_\mu = \{w_\mu > 0\}$ et on note qu'on peut en fait considérer que $\mu(E) = +\infty$ lorsque $\text{Cap}(E \setminus A) > 0$ car la fonction de torsion est inchangée. On remarque aussi que $|A_\mu| \leq \omega_d$.

Montrons que nécessairement $\mu = \infty_{\mathbf{R}^d \setminus A_\mu}$.

On note w_{A_μ} la fonction de torsion de A_μ , par définition, w_μ et w_{A_μ} vérifie respectivement,

$$\begin{cases} -\Delta w_\mu + w_\mu \mu = 1 \text{ dans } [H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu)]' \\ w_\mu \in H^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mu), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta w_{A_\mu} = 1 \text{ dans } A_\mu \\ w_{A_\mu} \in H_0^1(A_\mu). \end{cases}$$

Alors, par principe du maximum, $w_{A_\mu} \geq w_\mu$ quasi partout ce qui implique en particulier que $T(A_\mu) \geq T(\mu)$, de plus par le Lemme 2, on a aussi $A_p \cap A_\mu \xrightarrow{\gamma} \mu$ alors en passant à la limite dans le Lemme 4, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{\lambda_k(A_\mu)} - \frac{1}{\lambda_k(\mu)} \leq e^{\frac{1}{4\pi}} k \lambda_k(A_\mu)^{\frac{2}{d}} (T(A_\mu) - T(\mu)),$$

qui peut se réécrire en utilisant les Lemmes 3 et 5

$$0 \leq \lambda_k(\mu) - \lambda_k(A_\mu) \leq C(d) k^{2+\frac{4}{d}} (T^{-1}(\mu) - T^{-1}(A_\mu)).$$

On utilise maintenant la minimalité de μ

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mu) + \delta \lambda_k(\mu) &\leq T^{-1}(A_\mu) + \delta \lambda_k(A_\mu) \\ &\leq T^{-1}(\mu) + \delta \lambda_k(\mu) + (1 - |\delta| C(d) k^{2+\frac{4}{d}}) (T^{-1}(\mu) - T^{-1}(A_\mu)). \end{aligned}$$

Ainsi, si $|\delta| \ll k^{2+\frac{4}{d}}$, nécessairement, $T^{-1}(\mu) - T^{-1}(A_\mu) \geq 0$ ce qui implique $T(A_\mu) = T(\mu)$. Enfin, comme par définition de A_μ , $w_\mu \in H_0^1(A_\mu)$ on peut écrire

$$\int (2w_\mu - |\nabla w_\mu|^2) d\mathcal{L}^d \leq T(A_\mu) = T(\mu) = \int (2w_\mu - |\nabla w_\mu|^2) d\mathcal{L}^d - \int w_\mu^2 d\mu.$$

On en déduit que $\int w_\mu^2 d\mu = 0$ donc $\mu(A_\mu) = 0$, d'où $\mu = \infty_{\mathbf{R}^d \setminus A_\mu}$. □

Remarques - Par ce théorème, on voit tout de suite l'intérêt de principe de concentration compacité et la preuve donne un bon exemple de la manière dont il s'utilise.

On peut noter aussi qu'il est possible de montrer que le minimiseur est en fait la boule.

7 Etude d'une nouvelle fonctionnelle

L'objectif est maintenant d'étudier le problème

$$\max \{F(A) \mid A \text{ quasi-ouvert de } \mathbf{R}^d\} \quad (5)$$

avec

$$F(A) = \lambda_1(A) \|w_A\|_\infty$$

On n'ajoute pas de contrainte de masse car cette fonctionnelle est invariante par renormalisation. Notons qu'on travaille ici hors du cadre du théorème de Buttazzo - Dal Maso car la valeur propre est décroissante pour l'inclusion tandis que la norme infinie est croissante donc a priori même la question de l'existence de solutions n'est pas évidente.

On aborde cette fonctionnelle de deux manières différentes. Dans un premier temps par une

approche naive en mettant en place des expériences numériques pour trouver des informations au sujet de potentiels maximisers puis, dans un second temps, par une approche plus analytique se basant sur des résultats de A. Henrot, I. Lucardesi et G. Philippin dans un article [8] que nous n'avons lu qu'après.

Nous n'avons pas de conjecture sur le maximiser local par contre il a été conjecturé dans [8] que le maximum est atteint sur les convexes pour le triangle équilatéral même si ce dernier n'est pas un maximiseur local en dehors des convexes.

7.1 Approche numérique

Dans un premier temps on a souhaité mettre en place un algorithme de remontée de gradient qui permette d'approcher les potentiels maximisers de F . Pour mettre en place cet algorithme, il est nécessaire de définir une notion de différentiation sur les quasi-ouverts. On va utiliser la dérivée de forme (voir [9] chapitre 5).

Définition 13. Soit G une fonctionnelle définie sur les quasi-ouverts de \mathbf{R}^d .

Si V est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, on définit la dérivée de forme de la fonctionnelle G dans la direction V en A comme

$$G'(A) \cdot V = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G((Id + tV)A) - G(A)}{t}.$$

On souhaite donc différentier dans une direction V la fonctionnelle F . Seulement, la norme infinie n'est a priori pas différentiable, on va donc utiliser une approximation par les normes p et considérer la fonctionnelle $F_p(A) = \lambda_1(A)^\gamma \|w_A\|_p^\alpha |A|^{-\beta}$ avec $\beta = \frac{\alpha}{p} + \frac{2}{d}(\alpha - \gamma)$. On ajoute les puissances α et γ pour apporter plus de généralité au code et le terme $|A|^{-\beta}$ permet de rendre les fonctionnelles F_p invariantes par renormalisation. On peut maintenant calculer la dérivée de forme de F_p en utilisant les résultats présentés dans [9]. La proposition suivante est présentée dans un cadre régulier où l'expression de la dérivée par rapport au domaine est donnée comme une intégrale de bord.

Proposition 1. Si V est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ et A un ouvert de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$- \lambda_1'(A) \cdot V = - \int_{\partial A} |\nabla u|^2 V \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

Où u est la fonction propre associée à λ_1 telle que $\|u\|_2 = 1$ et n la normale sortante.

$$- |A|' \cdot V = \int_{\partial A} V \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

- $w'(A) \cdot V = v$ où v est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } A \\ v = -\nabla w_A \cdot V & \text{sur } \partial A \end{cases}$$

On déduit du troisième point de la propriété que la dérivée de forme de la norme p de la fonction de torsion dans une direction V en A a pour expression

$$\|w\|_p'(A) \cdot V = \|w_A\|_p^{1-p} \int_A v w^{p-1} \, d\mathcal{L}^d.$$

Bien que cette expression soit tout à fait satisfaisante d'un point de vue analytique elle nécessite de résoudre une EDP dans toutes les directions V que l'on considérera lors de la remontée de gradient ce qui est extrêmement lourd en termes de performances numériques. On utilise donc une méthode d'adjoint pour se restreindre à la résolution d'une unique EDP en introduisant φ l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = w^{p-1} & \text{dans } A \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial A. \end{cases}$$

On peut donc remplacer le terme en v en intégrant par partie ce qui donne

$$\|w\|_p'(A) \cdot V = \|w_A\|_p^{1-p} \int_{\partial A} \nabla w_A \cdot V \nabla \varphi \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

On peut alors enfin écrire la dérivée de F_p :

$$\begin{aligned} F_p'(A) \cdot V = & -\gamma \lambda_1(A)^{\gamma-1} \|w_A\|_p^\alpha |A|^{-\beta} \int_{\partial A} |\nabla u|^2 V \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ & + \alpha \lambda_1(A)^\gamma \|w_A\|_p^{\alpha-1} |A|^{-\beta} \int_{\partial A} \nabla w_A \cdot V \nabla \varphi \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ & - \beta \lambda_1(A)^\gamma \|w_A\|_p^\alpha |A|^{-\beta-1} \int_{\partial A} V \cdot n \, d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Maintenant qu'on sait calculer les dérivées directionnelles de notre fonctionnelle on peut choisir les classes de formes dans lesquelles le code tournera. On considère deux cas de figure on travaillera dans un premier temps sur des simplement connexes dont la frontière est définie par transformée de Fourier et dans un second temps sur des polygones.

Classe des simplement connexes dans \mathbf{R}^2 - On souhaite travailler avec des formes A satisfaisant

$$A = \{(r, \theta) \mid r \leq R(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Où $R(\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$ et en pratique, on choisira $N = 20$. On calcule la transformation V associée aux dérivées directionnelle dans \mathbf{R}^{2N+1} , on note que si on considère

$$A_t = \{(r, \theta) \mid r \leq R(\theta) + t g(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

on peut écrire $A_t = \left(Id + t \frac{g(\theta)}{R(\theta)} \right) A$, soit $A_t = (Id + tV)A$ pour $V : (r, \theta) \mapsto \left(\frac{g(\theta)}{R(\theta)} r, \theta \right)$.

Alors en utilisant cette expression et en remplaçant $g(\theta)$ par 1, $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ on peut mettre en place la remontée de gradient dans \mathbf{R}^{2N+1} .

Classe des polygones dans \mathbf{R}^2 - on souhaite travailler cette fois dans la classe des polygones à N cotés qui sont caractérisés par les coordonnées de chacun de leur sommets. On doit donc identifier la transformation V correspond au déplacement d'un sommet dans la direction 1 ou 2 en deux dimension, on note, connaissant l'expression de la dérivée de notre

fonctionnelle qu'il n'est nécessaire de connaître V que sur la frontière. On établit que si on déplace le sommet A compris entre les sommets B et C dans la direction i , la transformation $V_{A,i}$ associée est nulle sur chaque segment de la frontière excepté les deux segments $[A, B]$ et $[A, C]$ sur lesquels elle vaut respectivement $V(x) = \frac{\|x - B\|}{\|A - B\|} i$ et $V(x) = \frac{\|x - C\|}{\|A - C\|} i$.

Pour la mise en place effective du code, dans les deux cas nous avons utilisé le module Free-FEM pour définir les formes depuis leur frontière en faire le maillage puis calculer la valeur propre et résoudre les EDPs. Afin de vérifier la validité des codes nous avons vérifié qu'ils obtiennent bien la boule pour la minimisation de la valeur propre, la maximisation de la torsion et l'inégalité de Kohler-Jobin.

Dans l'analyse des résultats nous n'avons malheureusement pas vraiment réussi à exploiter ce que donne la première approche, cependant l'étude des polygones nous fait supposer que l'optimum est probablement un quadrilatère non convexe et qu'au sein des triangles l'optimum est le triangle équilatéral.

7.2 Approche analytique

En plus de ces expériences numériques nous sommes revenus vers une approche plus analytiques après avoir découvert le papier de A. Henrot, I. Lucardesi et G. Philippin [8] qui étudie entre autre la fonctionnelle F (G dans leur article). Dans leur approche, ils font le calcul explicite de la dérivée de forme de la norme infinie de la fonction de torsion sans passer par les normes p et ils démontrent qu'il n'y a pas existence de maximiseurs globaux dans la classe des simple connexes pour ce faire ils trouvent un meilleur candidat en retirant une petite sphère proche du bord. Par contre ils démontrent qu'il y a une solution dans la classe des convexes et ils font l'hypothèse que le maximum est atteint pour le triangle équilatéral. L'étude numérique que nous avons menée semble valider cette hypothèse et nous avons donc réfléchi a une manière de la démontrer en essayant une idée malheureusement infructueuse. Notre idée est la suivante, on aimerait trouver un moyen de montrer que pour les polygones convexes de plus de trois cotés on peut toujours trouver un polygone ayant un coté de moins qui soit un meilleur candidat il resterait alors à montrer que le triangle équilatéral est optimal parmi les triangle et alors par densité des polygones dans les convexes le résultat serait démontré.

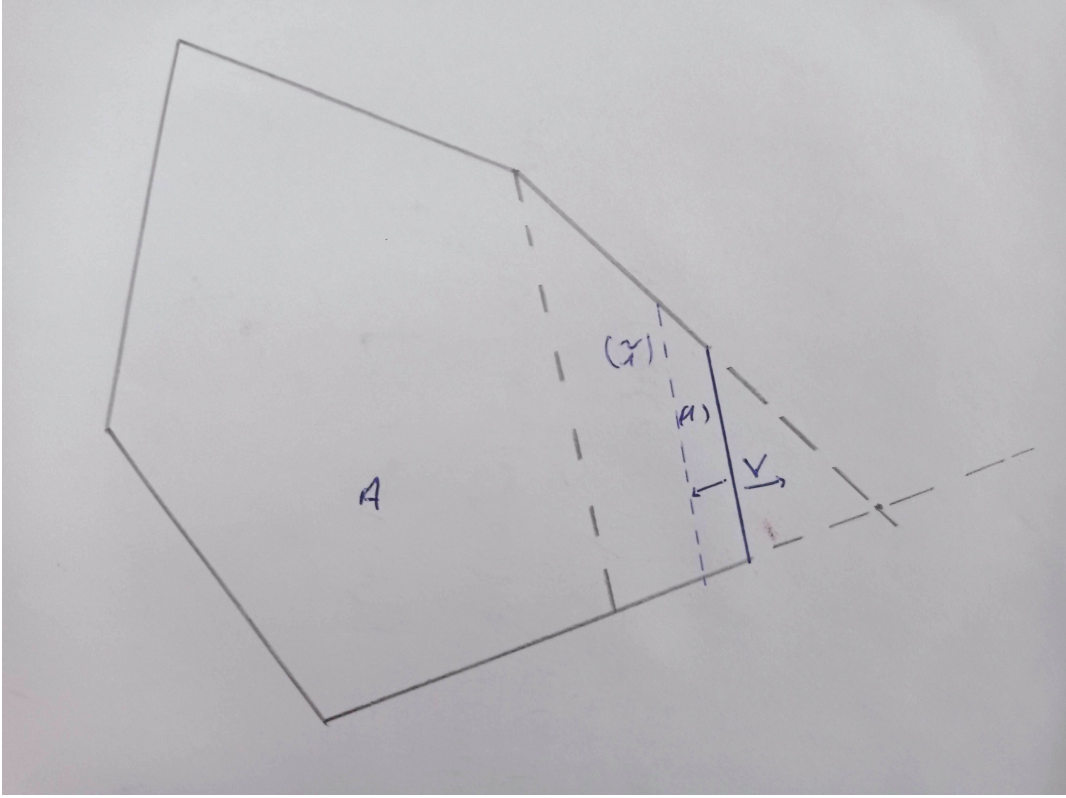
On utilise la condition d'optimalité qui découle de la dérivée de forme de F (voir [8]), pour tout $V : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$,

$$\int_{\partial A} (\lambda_1(A) \partial_n w_A \partial_n \varphi_{x_0} + \|w_A\|_{\infty} (\partial_n u)^2) V \cdot n d\mathcal{H}^{d-1} = 0.$$

Où x_0 est le point pour lequel le maximum de w_A est atteint et φ_{x_0} est la fonction de Green en ce point, autrement dit est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_{x_0} = \delta_{x_0} & \text{dans } \mathcal{D}'(A) \\ \varphi_{x_0} = 0 & \text{sur } \partial A. \end{cases}$$

On travaille dans un polygone A auquel on souhaite retirer un coté



Pour effectuer cette réduction de cotés, on regarde ce qu'il se passe lorsqu'on déplace le segment (1) sur la figure pour se ramener à un des cas en pointillés, on voudrait montrer qu'il ne peut pas y avoir de maxima locaux et que nécessairement le maximum est atteint aux bords. On va donc approcher la dérivée seconde autour des extrema en espérant qu'elle reste strictement positive on fait donc le calcul idéalisé suivant qui pourrait soutenir cette hypothèse. On choisit V tel que sur (1), $v \cdot n = \pm 1$ et $V \cdot n = 0$ sur les autres cotés. Alors on peut écrire sur (1) pour $\varphi \in H_0^1(A)$,

$$\Delta \varphi = \partial_n^2 \varphi + \partial_{(1)}^2 \varphi = \partial_n^2 \varphi.$$

De plus, $\Delta u = \lambda_1(A)u$ dans A donc $\delta u = 0$ sur (1), de même, $\Delta \varphi_{x_0} = 0$ sur (1) et bien évidemment $\Delta w = -1$. Il reste donc que sur (1),

$$\begin{aligned} \partial_n^2 \varphi_{x_0} &= 0, \\ \partial_n^2 u &= 0, \\ \partial_n^2 w &= -1 \end{aligned}$$

En déplaçant (1) de δ en $(\tilde{1})$, on regarde

$$I = |\delta| \int_{(\tilde{1})} \tilde{\lambda}_1 \partial_n \tilde{w}_A \partial \tilde{\varphi}_{x_0} + \|\tilde{w}_A\|_\infty (\partial_n \tilde{u})^2.$$

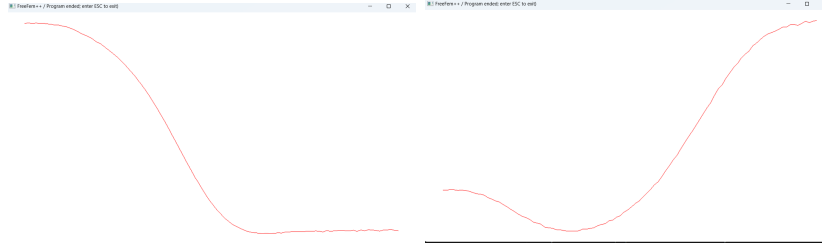
On fait maintenant de manière grossière des développements limités

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{n}} \tilde{w} &= \partial_n w + \delta \partial_n^2 w + o(\delta), \\ \partial_{\tilde{n}} \tilde{u} &= \partial_n u + \delta \partial_n^2 u + o(\delta), \\ \partial_{\tilde{n}} \tilde{\varphi}_{x_0} &= \partial_n \varphi_{x_0} + \delta \partial_n^2 \varphi_{x_0} + o(\delta). \end{aligned}$$

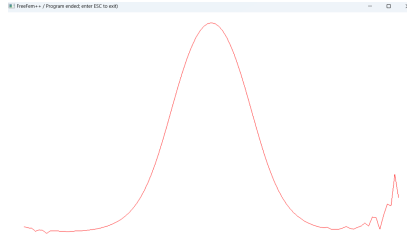
Alors en recollant les différents morceaux et en utilisant l'optimalité en $\delta = 0$,

$$I = |\delta| \int_{(1)} \lambda_1 \partial_n w \partial_n \varphi_{x_0} > 0.$$

Avant de chercher à justifier les différentes approximations faites, on a lancé des simulations, on affiche la valeur de la fonctionnelle en déplaçant un côté par exemple dans un quadrilatère et un pentagone



Ces deux courbes sont plutôt de bon augure car il n'y a pas de maxima en dehors des bords. Cependant, afin de tester le cas limite nous avons fait une courbe pour le rectangle en partant du rectangle presque plat et en envoyant un côté à l'infini. On observe malheureusement que



le maximum est atteint pour le carré ce qui est un contre exemple à notre hypothèse.

Remerciements

Je souhaite remercier mon maitre de stage Dorin Bucur qui m'a encadré pendant les 6 mois de ce stage en répondant à mes différentes questions et en m'aidant à trouver de nouvelles idées ainsi que pour les conseils au'il m'a donné au sujet des différentes options qui s'offraient à moi pour la thèse.

Je remercie aussi mes deux co-bureaux Téofil et Alphonse avec qui on a pu échanger sur les différentes difficultés qu'on rencontrait autant académiquement que personnellement.

Références

- [1] D. CIORANESCU et F. MURAT. A strange term coming from nowhere. *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials* :45-93, 1997. DOI : https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2032-9_4.

- [2] G. BUTTAZZO et G. DAL MASO. An existence result for a class of shape optimisation problems. *Arch. Rationale Mech. Anal.*, 122 :183-195, 1993. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF00378167>.
- [3] D. BUCUR, L. LAMBOLEY, M. NAHON et R. PRUNIER. Sharp quantitative stability of the dirichlet spectrum near the ball, 2023. URL : <https://arxiv.org/abs/2304.10916>. arXiv preprint.
- [4] L. BRIANI, G. BUTTAZZO et S. GUARINO LO BIANCO. On a reverse Kohler-Jobin inequality, 2022. URL : <http://cvgmt.sns.it/paper/5828/>. cvgmt preprint.
- [5] J. HEINONEN, T. KILPELÄINEN et O. MARTIO. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. Janvier 2006. ISBN : 0486450503.
- [6] P. L. LIONS. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(2) :109-145, 1984. URL : http://www.numdam.org/item/AIHPC_1984__1_2_109_0/.
- [7] D. BUCUR. Uniform concentration-compactness for sobolev spaces on variable domains. *Journal of Differential Equations*, 162(2) :427-450, 2000. DOI : <https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3726>.
- [8] A. HENROT, I. LUCARDESI et G. PHILIPPIN. On two functionals involving the maximum of the torsion function. *ESAIM : COCV*, 24(4) :1585-1604, 2018. DOI : <https://doi.org/10.1051/cocv/2017069>.
- [9] A. HENROT et M. PIERRE. *Shape Variation and Optimization : a Geometrical Analysis*, numéro 28 in Tracts in Mathematics. European Mathematical Society, 2018. DOI : [10.4171/178](https://doi.org/10.4171/178).